



Équations différentielles

Fiche de Léa Blanc-Centi.

1 Ordre 1

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2 \sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006991]

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006992]

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0; \pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006993]

Exercice 4 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006994]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$

2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006995]

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006996]

2 Second ordre

Exercice 7

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$

3. $y'' - 2y' + y = 0$

4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006997]

Exercice 8

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006998]

Exercice 9

Résoudre sur $]0; \pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \cotan x$, où $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006999]

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;

2. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007000]

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccati

1. Équation de Bernoulli

(a) Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

(b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. Équation de Riccati

(a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

(b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007001]

Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication* : étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007002]

Exercice 13

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007003]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Une telle fonction f est solution d'une équation différentielle $y' + y = c$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. x est solution particulière
 2. $\cos$ est solution particulière
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Solution particulière :

1. $-\frac{1}{2x}$
 2. $\frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x)$
 3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. C'est une équation à variables séparées.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. une infinité de solutions
 2. une solution
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Pour la fin : principe de superposition.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Utiliser la méthode de variation de la constante.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. (a) Se ramener à $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.
(b) $y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ ou $y = 0$.
 2. (a) Remplacer y par $u + y_0$.
(b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1) . Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :

$y_0(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.

Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2) . Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$:

$y_0(x) = a \cos x + b \sin x$ est solution de (E_2)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + y_0(x) = 2 \sin x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (a + b) \cos x + (-a + b) \sin x = 2 \sin x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.

Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

3. Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:

$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ est solution de (E_3)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) - y_0(x) = (x + 1)e^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b)e^x = (x + 1)e^x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.

Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

4. Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha \cos x + \beta \sin x$ est solution de (E_4)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha + \beta) \cos x + (-\alpha + \beta) \sin x = x - e^x + \cos x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.

Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Correction de l'exercice 2 ▲

Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convient si et seulement si

- f est dérivable
- f est solution de $y' + y = c$
- f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.

Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1})$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

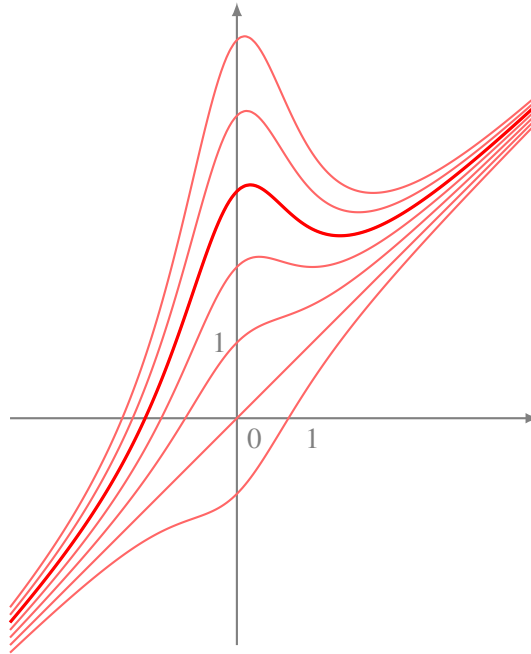
- (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + 1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1}$.
- (b) Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que $y_0(x) = x$ convient.
- (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

(d) $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$.

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -1, 0, \dots, 5$.



2. On commence par remarquer que $y_0(x) = \cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin x$.

Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \cos x + \lambda \sin x$$

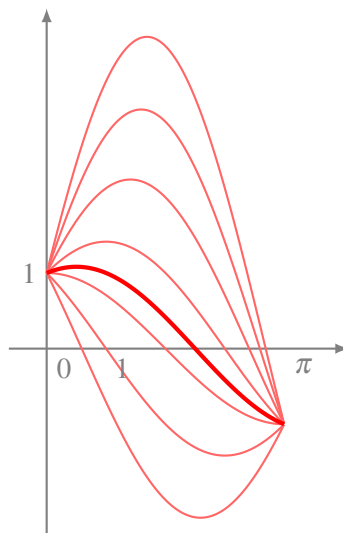
où λ est un paramètre réel.

3. On a

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos \frac{\pi}{4} + \lambda \sin \frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

La solution cherchée est $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \sin x$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -2, -1, 0, \dots, 4$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en gras).



Correction de l'exercice 4 ▲

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$

(a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.

Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

On calcule d'abord

$$y_0'(x) = \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2)$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ est solution de } y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1 \\ \iff y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 &= 1 \\ \iff \lambda'(x)x \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \\ \iff \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \quad \text{cela doit se simplifier !} \\ \iff \lambda'(x) &= x \exp(-x^2) \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$

(a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - y = 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y_0'(x) = \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x)$ alors

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ est solution de } y' - y = x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x) - \lambda(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) &= x^k \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x)$$

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x) + \lambda \exp(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

- (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + \ln^2(x)$. Les

solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1 + \ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1 + \ln^2(x)}$.

- (b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1 + \ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ est solution} \\ \Leftrightarrow y_0' + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}y_0 &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x)z(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}z(x) \right]}_{=0} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{1 + \ln^2(x)} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2(x)}$.

- (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\lambda'_0 = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y , on obtient $-y' e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:

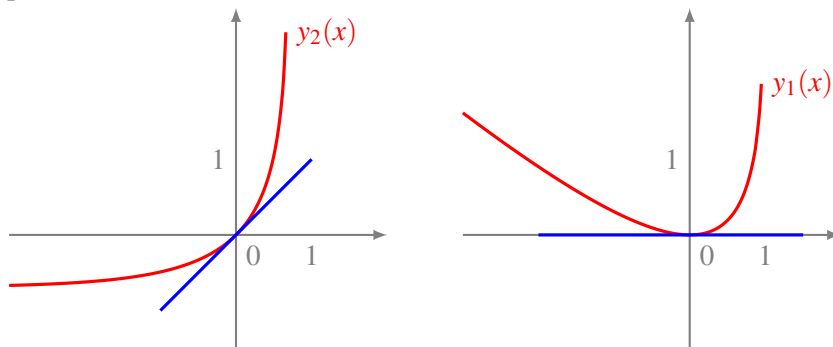
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$

Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$

où c est un paramètre réel strictement positif.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.



2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z' e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in J, e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$

où c est un paramètre réel.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$.

- (a) **Résolution sur $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$.**

Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit

$$y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$).

(b) **Recollement en 0.**

Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de λ_+, λ_- la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1) ?

— $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si

$\lambda_- = 0$. On peut alors poser $y(0) = 0$, quel que soit le choix de λ_+ .

— Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ \left(\frac{-1}{x}\right) e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \\ \text{pour } x < 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

— Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

(c) **Conclusion.**

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.

(a) **Résolution sur I .**

Sur l'intervalle I , l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

— Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x}y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I , est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty; 0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.

— Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x) \frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière est donc $y_0(x) = 1$.

— Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

(b) **Recollement en 0.**

Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\lambda_+ = \lambda_- = 0$. Dans ce cas, on peut alors poser $y(0) = 1$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x = 0$.

(c) **Conclusion.**

Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
2. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = -1 + i$ et $r = -1 - i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ ($A, B \in \mathbb{R}$). Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x + \mu)e^x$.
4. Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda \cos x + \mu \sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a + b \cos(2x) + c \sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 0$. Les solutions générales sont donc les $\lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{1}{3} \cos(2x) + 1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$, pour laquelle $r = 2$ est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Lorsque $d(x) = e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x} , qui convient si $a = \frac{1}{16}$.

Lorsque $d(x) = e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que $(\lambda x + \mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0 : on cherche donc une solution de la forme $ax^2 e^{2x}$, qui convient si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

Puisque $\frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, les solutions générales sont obtenues sous la forme $y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda \cos x + \mu \sin x$. En posant $y_1(x) = \cos x$ et $y_2(x) = \sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1 + \mu y_2$, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \cotan x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ \lambda'(-\sin x) + \mu' \cos x = \cotan x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cotan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \\ \mu'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cotan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$. On obtient donc

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\cos x \\ \mu'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{cases}$$

ce qui donne une primitive $\lambda(x) = -\sin x$.

Pour μ , on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$ (et donc $t = -\sin t x$), on calcule une primitive

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} x &= -\int \frac{t^2}{1-t^2} t = t - \int \frac{1}{1-t^2} t \\ &= t + \frac{1}{2} \ln(1-t) - \frac{1}{2} \ln(1+t) = \cos x + \frac{1}{2} \ln(1-\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x)\end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (-\sin x) \cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2} \ln(1-\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x) \right) \sin x$$

qui se simplifie $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0; +\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t)\end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 y'' + xy' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{aligned}y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x))\end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

— $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m} \arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m} \arctan x},$$

— $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

— $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m} \arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m} \arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Équation de Bernoulli

- (a) On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par y^n , ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

- (b) Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$. L'équation différentielle s'exprime alors $-\frac{1}{2}xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se restreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[& \text{si } \lambda = 0 \\]0; -\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda < 0 \\]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x) = \pm 1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ , et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1 . Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

2. Équation de Riccati

- (a) Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

(b) Équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

- Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.
- $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.
- On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2 \left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

- Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2 , cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} + 1 = 0$. On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$. Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x \ln |x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln |x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.
- Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x \ln |x|} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 12 ▲

- Notons $A(x) = \int_0^x e^{t^2} t$, une primitive de e^{x^2} . On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de $y' + e^{x^2} y = 0$ s'écrivent $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

Si $x \geq 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x) = \int_0^x e^{t^2} t \geq 0$ et comme $e^{t^2} \geq 1$ alors

$$A(x) = \int_0^x e^{t^2} t \geq \int_0^x 1 t = x$$

En conséquence :

$$0 \leq e^{-A(x)} \leq e^{-x}$$

Ainsi,

$$0 \leq |f(x)| \leq |\lambda| e^{-x}$$

et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2} y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et

$$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2} 2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2} y'(x)^2$$

en utilisant que $e^{-x^2} y''(x) = -y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :

$$u'(x) = -2xe^{-x^2} y'^2.$$

Ainsi la fonction u est croissante sur $] -\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq u(x) \leq u(0)$. Or $y^2(x) \leq u(x)$ par construction, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |y(x)| \leq \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. En faisant le changement de variable $x = e^t$ (donc $t = \ln x$) et en posant $z(t) = y(e^t)$ (donc $y(x) = z(\ln x)$), l'équation $x^2 y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$, dont les solutions sont les $z(t) = e^{t/2} \cdot \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

2. Supposons que f convienne : par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).

En dérivant l'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi on obtient que f est solution de $x^2 y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathcal{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible. Déjà, $f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$. Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \rightarrow 0$ mais $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$. De même avec $x'_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi + \frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x'_n) - f(0)}{x'_n - 0} = \frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $] -\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.